確率的逐次割り当て問題について (確率的環境下における数理モデルの理論と応用)

AUTHOR(S):

中井, 達

数理解析研究所講究録
第2044巻 2017年 207-217

確率的逐次割り当て問題について

中井 達

千葉大学教育学部

1 確率的逐次割当問題

確率的逐次割当問題 (Sequential Stochastic Assignment Problem) は、Derman, Lieberman and Ross [8] によって紹介された問題である。ある企業が、その企業で働く人間に逐次に現れる仕事を割り当てる。ただし、仕事は一度に全て出現するのではなく、一度に一つづつそれぞれの大きさを持って出現し、その大きさは確率変数で表される。一方、仕事を割り当てられる人間についてもそれぞれ能力が異なり、その能力により割り当てたことによる利得は異なる。どのような仕事にどの人間を割り当てれば良いかを考える問題である。

decision-maker は n 人の人間を雇っており、それぞれの能力を $p_1, p_2 \cdots, p_n$ とする。また、順序は一般性を失うことなく並べかえができ、$1 \geq p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n \geq 0$ とする。ここで、大きさ x の仕事に完全な (perfect) 人間が当たれば、そのときの利得は x とし、能力が p の人間が当たれば x そのものを得ることはできず、そのときの利得を px とする。すなわち、この p は各人の能力により時間がかかる場合もあり、また失敗をする事もあるのでそれらをも含めてこの値を考える。一方、n 個の仕事はが逐次に現れるが、これらの仕事の大きさは確率変数で表され、逐次に観測できる。これらの確率変数は、おのおの独立でかつ同一の分布に従い、その確率分布関数は既知とする。また、いったん割り当てられた人間は二度と割り当てられない。このとき、n 人の人間を n 個の仕事にどのように割り当てれば総期待利得を最大にできるかを考える。この問題に対しては、$p_1, p_2 \cdots, p_n$ とは独立な、確率変数の分布関数にのみ依存するしきい値 (threshold value) が求められ、これらの値を用いて、最適政策が求められる。

一方、次のような不等式に関する性質が成り立つことが知られている。(Hardy, Littlewood and Polya [10])

補題 1 （Hardy の補題）

$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$ および $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq 0$ とする。このとき

$$\max_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^{N} a_i b_i$$

となる。ただし、$\mathcal{S}_n$ は n 次の対称群とする。

したがって、もし n 個の仕事の大きさを一度に観測できれば、この補題によって、値の一番大きい仕事に能力 p_1 の人間を、2番目に大きい仕事に p_2 を、$\cdots$、値の一番小さい仕事には能力 p_n の人間を割り当てればよい。このことから、この問題はHardy の補題の確率的一般化と考えられる。

2 確率的逐次割り当て問題に関する文献

Derman, Lieberman and Ross [8] に始まる確率的逐次割当問題に関しては、Albright and Derman [1]、Nakai[14, 15, 16, 19, 20, 21]、Righter [22, 23] など多くのの文献がすでに存在し、1990 年頃までの文献についてはこれらの文献に詳しい。。

しかし、2000 年以降、確率的逐次割り当て問題の応用を考えるものを含め多くの文献が出てきているので簡単に紹介しよう。最初のグループは、上記の文献の延長線上にあるもので、つぎのようなものである。仕事への割り当てを先に延ばすことができる場合について考えたもの [9]、$p_1, p_2 \cdots, p_n$ の中に、仕事へ割り当てたとき確率変数で成功する確率が表されるものが含まれる場合を考えたもの ([11])、仕事の大きさ X の分布が未知のものについて、推定と極限を考えたもの ([13])、総期待利得が目的とする値に到達しない確率を最小にする問題を考えたもの ([2])、仕事の大きさを表す確率変数 X が独立でない場合に、仕事の数が未知のモデルを考えたもので、n 期間に出現する仕事数の分布が二項分布にしたがうモデルと、割り当てる人の数が確率変数で表されるモデルを考えたもの ([12]) などである。

つぎのグループは応用を考えたものであり、確率的逐次割り当て問題の最適政策がしきい値によって定まるという性質に着目したものである。[26] は臓器移植への応用を考えたもので、移植を待っている n 人の患者に逐次に現れる臓器に割り当てる。患者も臓器もタイプに分けられ、X は臓器のタイプを表す確率変数とする。このとき、臓器のタイプを患者のタイプごとにグループ分けし、同じタイプ同士で移植を行う。このとき、臓器のタイプをどのようにグループに分ければ良いかを考える問題が基本となっている。[3, 4] では、割り当てる p_i が k 個のカテゴリーに分割されその割合が決まっているとき、job の数を大きくしたときの極限について考えている。

最後に、確率的逐次割り当て問題とは多少異なっているが、確率変数列を逐次に観測し、観測値をもとに n 個の箱のどこへ割り当てるかを決定するという意味で、近い問題である coupon collecting problem に関していくつかの論文がある。[5, 6, 25, 27] この問題は、n 個の箱すべてにクーポンを少なくとも 1 枚入れることを目的とし、入れるクーポンは 0 または 1 を取る n 次元確率変数で、このクーポンは 1 の値が出た箱に入れることが出来るというものである。

3 確率的逐次割当問題

3.1 確率的逐次割当問題

Derman, Lieberman and Ross [8] で考えられた確率的逐次割当問題はつぎのようなモデルである。逐次に観測できる n 個の仕事の大きさは、確率変数列 $\{X_i\}_{i=1,2,\cdots,n}$ で表され、独立でかつ同一の分布関数に従い、その確率分布関数は既知とする。一方、n 人の人間の能力は $p_1, p_2 \cdots, p_n$ とし、一般性を失うことなく $1 \geq p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n \geq 0$ とする。このとき、大きさ x の仕事に能力が p の人間が当たれば、この割り当てによる利得を px とする。また、いったん割り当てられれば二度と割り当てられない。このとき、n 人の人間を n 個の仕事にどのように割り当てれば総期待利得を最大にできるかを考える。

残りの計画期間が n とし、この期間内に n 個の $\{p_1, \cdots, p_n\}$ を割り当てるとき、$(p_1, \cdots, p_n)$ をこの問題の状態と呼び、この状態での確率的逐次割当問題を $P(p_1, \cdots, p_n)$ と表す。また状態が $(p_1, \cdots, p_n)$ の確率的逐次割当問題で、確率変数 X の観測値が x のとき、この条件付きの部分問題を $P(p_1, \cdots, p_n|x)$ と表す。

このとき、これらの確率的逐次割当問題 $P(p_1, \cdots, p_n)$ と $P(p_1, \cdots, p_n|x)$ で最適に振る舞って得られる総期待利得をそれぞれ $v(p_1, \cdots, p_n)$ と $v(p_1, \cdots, p_n|x)$ とすると、次の最適方程式を満足する。

$$
\begin{aligned}
v(p_1, \cdots, p_n) &= E[v(p_1, \cdots, p_n|X)] &(1)\\
v(p_1, \cdots, p_n|x) &= \max_{1 \leq j \leq n} \{p_j x + v(p_1, \cdots, p_{i-1}, p_{1+1}, \cdots, p_{n-1})\} &(2)
\end{aligned}
$$

ただし、$\{p_1^*, \cdots, p_{n-1}^*\}$ は、n 個の $\{p_1, \cdots, p_n\}$ の中から、割り当てられた p_j を除いた残りの $n-1$ 個とする。$(p_1, \cdots, p_{i-1}, p_{1+1}, \cdots, p_{n-1})$

つぎに数列 $\{a_n^i\}_{i=0,\cdots n}$ を次のように帰納的に定義する。

$$
\begin{aligned}
a_n^i &= \int_{a_{n-1}^{i-1}}^{\infty} a_{n-1}^{i-1} dF(x) + \int_{a_{n-1}^i}^{a_{n-1}^{i-1}} x dF(x) + \int_0^{a_{n-1}^i} a_{n-1}^i dF(x)\\
&= S_F(a_{n-1}^i) - T_F(a_{n-1}^{i-1}) &(3)
\end{aligned}
$$

ただし、$a_n^0 = \infty$ とする。ここで、

$$
T_F(z) = \int_z^{\infty} (x-z) dF(x) \quad と \quad S_F(z) = z + T_F(z) \tag{4}
$$

とする。これらの関数は、DeGroot[7] などで定義されているよく知られた関数である。

定理 1 問題の状態が $(p_1, \cdots, p_n)$ の確率的逐次割当問題 $P(p_1, \cdots, p_n)$ の最適政策はとき、次のようなる。値 x を観測したとき、$a_n^j < x \leq a_n^{j-1}$ ならば、この x を j 番目の p_j に割り当てることが最適である。

定理 2 問題 $P(p_1, \cdots, p_n)$ で最適に振る舞ったときの総期待利得 $v(p_1, \cdots, p_n)$ は、

$$v(p_1, \cdots, p_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i a_n^i \tag{5}$$

となる。

これら 2 つの性質は、n に関する帰納法により示される。また、簡単な計算から、つぎの性質が成り立つ。

補題 2 任意の $n(\geq 1)$ と $i(1 \leq i \leq n)$ に対して、

$$a_n^{i-1} \geq a_{n-1}^{i-1} \geq a_n^i$$

となる。

注 1 定理 1 と 2 から判るように最適政策とその政策にしたがったときに得られる総期待利得は $\{a_n^i\}_{i=1,2,\cdots,n}$ によって求められるが、これらの値は確率変数 X の分布関数 $F(x)$ によってのみ決まる値で、$\{p_1, \cdots, p_n\}$ とはまったく無関係な値となる。ただ、このことは利得関数が px のように p に依存する関数と x に依存する関数の積として表されている事から導かれる。

注 2 さらに、確率的逐次割り当て問題においては、仕事が現れるごとに取り得る決定の数が減少することが基本的な性質を特徴づけており、定理 1 と 2 からもこのことが判る。

つぎの性質が Albright and Derman[1] から得られる。

定理 3 $F(x)$ を連続な分布関数とし、$0 < \pi < 1$ とする。このとき

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=[n\pi]+1}^{n} a_n^i = \int_{F^{-1}(\pi)}^{\infty} x dF(x)$$

かつ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{[n\pi]} a_n^i = \int_{-\infty}^{F^{-1}(\pi)} x dF(x)$$

であり、$\lim_{n\to\infty} a_n^{[n\pi]} = F^{-1}(\pi)$ となる。ただし、F^{-1} は分布関数 $F(x)$ の order π の quantile 点とする。

4 連続時間の確率的逐次割り当て問題

Derman, Lieberman and Ross [8] などでは、確率的逐次割り当て問題を離散時間の n 期間問題として定式化している。このモデルは注 2 にもあるように一度に一つずつ決定を取れる回数が減少することに注意すれば、連続時間のモデルとして定

式化することは可能である。したがって、仕事が一定の rate λ のポアソン過程にしたがって出現し、仕事が現れるときに決定を取る問題として定式化できる。

$v_n(p_1,\cdots,p_n;T,t)$ を最後の決定を行ったときの残存時間が T のとき、t 時間経過後に決定機会が現れたときに最適に振る舞って得られる総期待利得とする。このとき、最適性の原理よりつぎの再帰方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & v_n(p_1,\cdots,p_n;T,t) && (6)\\ &= \lambda\triangle t\int_0^\infty \max_{1\le i\le n}\{p_ix \\ &\qquad +v_{n-1}(p_1,\cdots,p_{i-1},p_{1+1},\cdots,p_{n-1};T-t-\triangle t,0))]\}dF(x) \\ &\qquad +(1-\lambda\triangle t)v_n(p_1,\cdots,p_n;T,t+\triangle t)+o(\triangle t) && (7)\end{aligned}$$

このことから、つぎの関係式が成り立つ。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}v_n^k(p_1,\cdots,p_n;T,t) \\ &= -\lambda\int_0^\infty \max_{1\le i\le N}\{p_ix+v_{n-1}(p_1,\cdots,p_{i-1},p_{1+1},\cdots,p_{n-1};T-t,0)\}dF(x) \\ &\qquad +\lambda v_n^k(p_1,\cdots,p_n;T,t) && (8)\end{aligned}$$

ただし、$v_n(p_1,\cdots,p_n;T,T)=0$ である。

確率的逐次割り当て問題 $v_n(p_1,\cdots,p_n;T,t)$ の最適政策と最適解は、Hardy の補題を使えばつぎのようになる。

定理 4 $f_1^n(T,t)\ge f_2^n(T,t)\ge\cdots\ge f_n^n(T,t)\ge 0$ となる関数列 $\{f_i^n(T,t)\}$ が存在し $(1\le i\le n)$、つぎの性質が成り立つ。

(1) $f_{i-1}^{n-1}(T,t)\ge x\ge f_i^{n-1}(T,t)$ ならば、i 番目の p_i を割り当てることが最適である。

(2) $f_i^n(T,t)$ はつぎの関係を満たす。

$$\begin{aligned} f_i^n(T,t) &= \lambda e^{\lambda t}\int_t^T h_i^n(T,t)e^{-\lambda t}dt \\ h_i^n(T,t) &= \int_{f_i^{n-1}(T-t,0)}^{f_{i-1}^{n-1}(T-t,0)} xdF(x)+f_{i-1}^{n-1}(T-t,0)(1-F(f_{i-1}^{n-1}(T-t,0))) \\ &\qquad +f_i^{n-1}(T-t,0)F(f_i^{n-1}(T-t,0))\end{aligned}$$

(3) 最適政策にしたがったときの総期待利得は、つぎのようになる。

$$v_n(p_1,\cdots,p_n;T,t)=\sum_{i=1}^n p_if_i^n(T,t)$$

4.1 割引率がある場合

前節では、計画期間を有限で T としたが、計画期間を無限期間とし、割引率 α を考えるモデルとして定式化できる。$v_n(p_1,\cdots,p_n;t)$ を最後の決定を行ってから、

t 時間経過後に決定機会が現れたときに最適に振る舞って得られる総期待利得とする。この場合に最適方程式はつぎのように表せる。このことから、つぎの関係式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}v_n^k(p_1,\cdots,p_n;t)\\
&\quad=-(\lambda+\alpha)\int_0^\infty \max_{1\leq i\leq N}\{p_ix+v_{n-1}(p_1,\cdots,p_{i-1},p_{1+1},\cdots,p_{n-1};0)\}dF(x)\\
&\qquad\qquad+\lambda v_n^k(p_1,\cdots,p_n;t) \qquad (9)
\end{aligned}$$

ただし、$v_n(p_1,\cdots,p_n;\infty)=0$ である。

この場合も同じように最適政策と最適解を求めることが出来る。また、以下のモデルにおいても、計画期間を有限期間 T と限らず、無限期間モデルとし割引率 α を考える場合についても同様の性質が求められる。

5 決定回数が未知の確率的逐次割当問題

5.1 決定回数が未知の過程

決定回数 (現れる仕事の数) が未知の確率的逐次割当問題を、Nakai[19] にしたがって考える。$\boldsymbol{q}=(q_0,q_1,q_2,\cdots)$ を残りの決定回数 N に関する事前情報とし、それぞれの決定機会が現れるまでの経過時間を表す確率変数 Z は互いに独立で、指数分布にしたがうものとする。Z_j を j 番目の仕事が現れるまでの時間とすれば、

$$P(Z_j\leq t)=1-e^{-\lambda t}$$

となる。このとき、確率変数 Y を残りの仕事 N 個のうち最初の仕事があらわれるまでの時間とすれば、

$$P(Y\leq t|N=k)=1-(e^{-\lambda t})^k=1-e^{-k\lambda t}$$

となる。

つぎに、$\overline{\boldsymbol{q}}=(\overline{q}_0,\overline{q}_1,\overline{q}_2,\cdots)$ を最後に決定を行ってから t 時間後に仕事が現れたとき、残りの仕事の数に関する事後情報とすれば、

$$\overline{q}_k=cq_{k+1}e^{-k\lambda t}$$

となる。ただし、$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\overline{q}_k=1$ である。また、$\boldsymbol{q^*}=(q_0^*,q_1^*,q_2^*,\cdots)$ を最後に決定をしてから t 時間のあいだに新たな仕事が現れないとき、残りの仕事の数に関する事後情報は、

$$q_k^*=dq_ke^{-k\lambda t}$$

となる。ただし、$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}q_k^*=1$ である。

5.2 決定回数が未知の確率的逐次割当問題

決定回数が未知の確率的逐次割当問題において、$\boldsymbol{q} = (q_0, q_1, q_2, \cdots)$ を残りの仕事の数に関する事前情報とし、n を残り仕事数の最大値とする。新たな仕事が現れたときに仕事の x に対して、$p_1, \cdots, p_n$ のどの p を割り当てるかを考える。このとき、割り当てる p の数は残り仕事数の最大値と等しいと考えて一般性は失わない。また、ここでは有限期間問題とし、割引率は考えない。

$v_n(p_1, \cdots, p_n; T, t, \boldsymbol{q})$ を最後の決定を行ったときの残存時間が T のとき、残りの仕事の数に関する情報が $\boldsymbol{q}$ で、残り仕事数の最大値を n とする。t 時間経過後に決定機会が現れたときに最適に振る舞って得られる総期待利得とする。さらに、$v_n^k(p_1, \cdots, p_n; T, t, q)$ を最後の決定を行ったときの残存時間が T の時点で、残りの仕事数に関する情報が $\boldsymbol{q}$ で、$p_1, \cdots, p_n$ を割り当てるとき、t 時間経過後に新たな仕事が現れ、最適に振る舞って得られる総期待利得とする。

このとき、最適性の原理よりつぎの最適方程式が得られる。

$$
\begin{aligned}
v_n(p_1, \cdots, p_n; T, t, \boldsymbol{q}) &= E_N[v_n^N(p_1, \cdots, p_n; T, t, \boldsymbol{q})] \\
v_n^k(p_1, \cdots, p_n; T, t, \boldsymbol{q}) &= k\lambda \triangle t \int_0^\infty \max_{1 \le i \le N} \{p_i x \\
&\quad + E[v_{n-1}^{N-1}(p_1, \cdots, p_{i-1}, p_{1+1}, \cdots, p_{n-1}; T - t - \triangle t, 0, \overline{\boldsymbol{q}}))]\} dF(x) \\
&\quad + (1 - k\lambda \triangle t) v_n^k(p_1, \cdots, p_n; T, t + \triangle t, \boldsymbol{q}) + o(\triangle t)
\end{aligned} \tag{10}
$$

ただし、E は N に関する期待値であり、

$$
\begin{aligned}
&E[v_{n-1}^{N-1}(p_1, \cdots, p_{i-1}, p_{1+1}, \cdots, p_{n-1}; T - t, 0, \overline{\boldsymbol{q}}))] \\
&\qquad = v_{n-1}(p_1, \cdots, p_{i-1}, p_{1+1}, \cdots, p_{n-1}; T - t, 0, \overline{\boldsymbol{q}})
\end{aligned}
$$

である。このことから、つぎの関係式が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} v_n^k(p_1, \cdots, p_n; T, t, \boldsymbol{q}) \\
&\quad = \ k\lambda \int_0^\infty \max_{1 \le i \le N} \{p_i x + v_{n-1}(p_1, \cdots, p_{i-1}, p_{1+1}, \cdots, p_{n-1}; T - t, 0, \overline{\boldsymbol{q}})\} dF(x) \\
&\qquad\qquad - k\lambda v_n^k(p_1, \cdots, p_n; T, t, \boldsymbol{q})
\end{aligned} \tag{11}
$$

ただし、$v_n^k(p_1, \cdots, p_n; T, T, \boldsymbol{q}) = 0$ である。

このとき、つぎの性質が成り立つ。

定理 5 $h_1^n(T, t, \boldsymbol{q}) \ge h_2^n(T, t, \boldsymbol{q}) \ge \cdots \ge h_n^n(T, t, \boldsymbol{q}) \ge 0$ となる関数列 $\{h_i^n(T, t, \boldsymbol{q})\}$ が存在し $(1 \le i \le n)$、つぎの性質が成り立つ。

(1) $h_{i-1}^{n-1}(T, t, \boldsymbol{q}) \ge x \ge h_i^{n-1}(T, t, \boldsymbol{q})$ ならば、i 番目の p_i を割り当てることが最適である。

(2) $h_i^n(T, t, \boldsymbol{q})$ はつぎの関係を満たす。

$$
h_i^n(T, t, \boldsymbol{q}) = \sum_{k=1}^n q_k^* g_i^{n,k}(T, t, \boldsymbol{q})
$$

ただし、

$$
\begin{aligned}
g_i^{n.k}(T,t,\boldsymbol{q}) &= k\lambda e^{k\lambda t}\int_t^T f_i^n(T,t,\boldsymbol{q})e^{-k\lambda t}dt \\
f_i^n(T,t,\boldsymbol{q}) &= \int_{h_i^{n-1}(T-t,0,\boldsymbol{q})}^{h_{i-1}^{n-1}(T-t,0,\boldsymbol{q})} xdF(x) \\
&\qquad +h_{i-1}^{n-1}(T-t,0,\boldsymbol{q})(1-F(h_{i-1}^{n-1}(T-t,0,\boldsymbol{q}))) \\
&\qquad\qquad +h_i^{n-1}(T-t,0,\boldsymbol{q})F(h_i^{n-1}(T-t,0,\boldsymbol{q}))
\end{aligned}
$$

(3) 最適政策にしたがったときの総期待利得は、つぎのようになる。

$$
v_n(p_1,\cdots,p_n;T,t,\boldsymbol{q}) = \sum_{i=1}^n p_i h_i^n(T,t,\boldsymbol{q})
$$

6 見送りが可能な確率的逐次割当問題

連続時間の確率的逐次割当問題において、これまでは仕事が現れればいずれかの p を割り当てるモデルとして解析してきたが、見送ることが出来るモデルを考える。仕事は一定の割合 λ にしたがうポアソン過程にしたがって出現する。

$v_n(p_1,\cdots,p_n;T,t)$ を最後の決定を行ったときの残存時間が T のとき、t 時間経過後に新たな仕事が現れ、最適に振る舞って得られる総期待利得とする。

このとき、最適性の原理よりつぎの再帰方程式が得られる。

$$
\begin{aligned}
&v_n(p_1,\cdots,p_n;T,t) \qquad (12)\\
&= \lambda\triangle t\int_0^\infty \max\{\max_{1\le i\le n}\{p_i x + v_{n-1}(p_1,\cdots,p_{i-1},p_{1+1},\cdots,p_{n-1};T-t-\triangle t,0)\}, \\
&\qquad v_n(p_1,\cdots,p_n;T-t-\triangle t,0)\}dF(x) \\
&\qquad +(1-\lambda\triangle t)v_n(p_1,\cdots,p_n;T,t+\triangle t)+o(\triangle t) \qquad (13)
\end{aligned}
$$

このことから、つぎの関係式が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}v_n(p_1,\cdots,p_n;T,t) \qquad (14)\\
&= \lambda\int_0^\infty \max\{\max_{1\le i\le n}\{p_i x + v_{n-1}(p_1,\cdots,p_{i-1},p_{1+1},\cdots,p_{n-1};T-t,0)\}, \\
&\qquad v_n(p_1,\cdots,p_n;T-t,0)\}dF(x) \\
&\qquad -\lambda v_n(p_1,\cdots,p_n;T,t) \qquad (15)
\end{aligned}
$$

ただし、$v_n(p_1,\cdots,p_n;T,T)=0$ である。

このとき、これまでと同様にしてつぎの性質が成り立つことが判る。

定理 6 $h_1(T,t)\ge h_2(T,t)\ge\cdots\ge h_n(T,t)\ge\cdots\ge 0$ となる関数列 $\{h_i(T,t)\}$ が存在し $(i=1,2,3,\cdots)$、つぎの性質が成り立つ。

(1) $h_{i-1}(T,t)\ge x\ge h_i(T,t)$ ならば、*i-th action* p_i を割り当てる。

(2) $h_i(T,t)$ はつぎの関係を満たす。

$$
\begin{aligned}
h_i(T,t) &= \lambda e^{\lambda t}\int_t^T f_i(T,t)e^{-\lambda t}dt \\
f_i(T,t) &= \int_{h_i(T-t,0)}^{h_{i-1}(T-t,0)} xdF(x) \\
&\qquad +h_{i-1}(T-t,0)(1-F(h_{i-1}(T-t,0))) \\
&\qquad +h_i(T-t,0)F(h_i(T-t,0))
\end{aligned}
$$

(3) 最適政策にしたがったときの総期待利得は、つぎのようになる。

$$
v_n(p_1,\cdots,p_n;T,t)=\sum_{i=1}^{n}p_ih_i(T,t)
$$

参考文献

[1] S. C. Albright and C. Derman, Asymptotic Optimal Policies for the Stochastic Assignment Problem, *Man. Sci.*, vol. 19, 46–51, 1972.

[2] G. Baharian and S. H. Jacobson, Stochastic sequential assignment problem with threshold criteria, *Prob. Eng. Inf. Sci.*, vol. 27, 277–296, 2013.

[3] G. Baharian and S. H. Jacobson, Limiting behavior of the stochastic sequential assignment problem, *Nav. Res. Logistics*, vol. 60, 321–330, 2013.

[4] G. Baharian and S. H. Jacobson, Limiting behavior of the target-dependent stochastic sequential assignment problem, *J. Appl. Prob.*, vol. 51, 943–953, 2014.

[5] I. David and U. Yechiali, Sequential Assignment Match Processes with Arrivals of Candidates and Offers, *Prob. Eng. Inf. Sci.*, vol. 4, 413–430, 1990.

[6] I. David and U. Yechiali, One-Attribute Sequential Assignment Match Processes in Discrete Time, *Oper. Res.*, vol. 43, 879–884, 1995.

[7] M. H. DeGroot, *Optimal Statistical Decisions*, McGraw-Hill, 1970.

[8] C. Derman, G. J. Lieberman and S. M. Ross, A Sequential Stochastic Assignment Problem, *Man. Sci.*, 18, 349–355, 1972.

[9] T. Feng and J. C. Hartman, Sequential stochastic assignment problem with the postponement option, *Prob. Eng. Inf. Sci.*, vol. 27, 25–51, 2013.

[10] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Polya, *Inequality*, Cambridge, 1934.

[11] A. Khatibi1, G. Baharian, E. R. Kone and S. H. Jacobson, The sequential stochastic assignment problem with random success rates, *IIE Trans.*, vol. 46, 1169–1180, 2014.

[12] A. Khatibi1, G. Baharian, B. Behzad and S. H. Jacobson, Extensions of the sequential stochastic assignment problem, *Math. Meth. Oper. Res.*, vol. 82, 317–340, 2015.

[13] A. J. Lee and S. H. Jacobson, Sequential stochastic assignment under uncertainty:estimation and convergence, *Stat. Infer. Stoch. Pro.*, vol. 14, 21–46, 2011.

[14] T. Nakai, Optimal Assignment for a Random Sequence with an Unknown Parameter, *J. Inf. & Opt. Sci.*, vol. 1, 129–138 1980.

[15] T. Nakai, Sequential Stochastic Assignment Problem with Rejection, *J. Inf. & Opt. Sci.*, vol. 2, 169–181, 1981.

[16] T. Nakai, A Time Sequential Game Related to the Sequential Assignment Problem, *J. Oper. Res. Soc. Japan*, vol. 25, 129–138, 1982.

[17] T. Nakai, Optimal Stopping Problem in a Finite State Partially Observable Markov Chain, *J. Inf. & Opti. Sci.*, vol. 2, 159–176, 1983.

[18] T. Nakai, The Problem of Optimal Stopping in a Partially Observable Markov Chain, *J. Opt. Theory Appl.*, vol. 45, 425–442, 1985.

[19] T. Nakai, Optimal Assignment for a Random Sequence with an Unknown Number of Jobs, *J. Oper. Res. Soc. Japan*, vol. 28, 179–194, 1985.

[20] T. Nakai, A Sequential Stochastic Assignment Problem in a Partially Observable Markov Chain, *Math. Oper. Res.*, vol. 11, 230–240, 1986.

[21] T. Nakai, A Sequential Stochastic Assignment Problem in a Stationary Markov Chain, *Math. Japonica*, vol. 31, 741–757, 1986.

[22] R. A. Righter, The Stochastic Sequential Assignment Problem with Random Deadlines, *Prob. Eng. Inf. Sci.*, vol. 1, 189–202, 1987.

[23] R. A. Righter, Stochastically Maximizing the Number of Success in a Sequential Assignment Problem, *J. App. Prob.*, vol. 27, 351–364, 1990.

[24] R. Righter, Stochastic sequential assignment problem with arrivals, *Prob. Eng. Inf. Sci.*, vol. 25, 477 – 485, 2011.

[25] S. M. Ross and David Teng Wu, A generalized coupon collecting model as a parsimonious optimal stochastic assignment model, *Ann Oper. Res.*, vol. 208, 133–146, 2013.

[26] X. Su and S. A. Zenios, Patient Choice in Kidney Allocation: A Sequential Stochastic Assignment Model, *Oper. Res.*, vol. 53, 443–455, 2005.

[27] D. T. Wu and S. M. Ross, A stochastic assignment problem, *Nav. Res. Logistics*, Vol. 62, 23-31, 2015.